Récapitulatif sur les plus courts chemins

- NP-difficile dans le cas général
- Polynomial dans plusieurs cas particuliers
  1. **Pas de fonction de coût** $(c = 1)$: parcours en largeur
  2. **Acyclique** :
     - Orienté : ordre topologique
     - Non orienté (forêt) : au plus un o-d chemin élémentaire
  3. **Sans cycle absorbants** :
     - Orienté : programmation dynamique
     - Non orienté : T-joints
  4. **Poids positifs** : algorithme de Dijkstra

$$\begin{cases} \min\limits_{u} \sum\limits_{t=0\,t'}^{T-1\,t'} c_t(s_t, u_t) + c_T(s_T) \\ \text{s.t.} \quad s_0 = s_{ini} \quad s' \\ \qquad s_{t+1} = f_t(s_t, u_t), \quad \forall t \in [\![0, T-1]\!] \\ \qquad u_t \in \mathcal{U}_t(s_t), \quad \forall t \end{cases}$$

5.3) $V^{\text{Backward}}(t', s')$

$$\begin{cases} V^B(T, s) = c_T(s) \quad \forall s \\ V^B(t, s) = \min\limits_{u \in \mathcal{U}_t(s)} c(s, u) + V^B(t+1, f_t(s, u)) \end{cases}$$

$V^{\text{Forward}}(t', s')$

$$\begin{cases} V^F(0, s) = \begin{cases} 0 & s = s_0 \\ +\infty \end{cases} \\ V^F(t+1, s) = \min\limits_{(s', u) \text{ tq } s = f(s', u)} c(s', u) + V^F(t, s') \end{cases}$$

5.16/ x_k : inventaire au temps k $\quad x_1 = 2$ /

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{d_k}_{\text{demande}} + \underbrace{u_k}_{\text{commande}} = f_k(x_k, u_k)$$

k	1	2	3
d_k	3	2	4

$$\left.\begin{array}{l} x_k + u_k \leq 6 \\ x_k - d_k + u_k \geq 0 \end{array}\right\} U_k(x_k)$$

coût : $4u_k + 3\,\mathbb{1}_{u_k>0} + x_{k+1}$

$c_k(x_k,u_k) = 5u_k + 3\,\mathbb{1}_{u_k>0} + x_k - d_k$

$T = 4$, $c_T(x) = 0$

$$(d_k - x_k)_+ \leq u_k \leq 6 - x_k$$

$$U_k(x) = [\![(d_k - x_k)_+ , 6 - x_k]\!]$$

$k \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6
4	0	0	0	0	0	0	0
3	19 4	15 3	11 2	7 1	0 0	1 0	2 0
2	30 2	26 1	19 0	16 0	13 0	10 0	4 0
1			$\boxed{36\ 3}$				

$$U_3(x) = [\![\underbrace{(4-x)_+}, 6-x]\!]$$

$$= \max(4-x, 0)$$

$$U_2(x) = [\![(2-x)_+ , 6-x]\!]$$

$$V(3,x) = \min_{u \in U_3(x)} c(x,u) + \overbrace{\cancel{V(4, f_3(x,u))}}^{=0}$$

$$V(3,0) = \min_{u \in [\![4,6]\!]} c(0,u) = \min_{u \in [\![4,6]\!]} 5u - 1 = 19$$

$$V(3,5) = \min_{u \in [\![0,1]\!]} c(5,u) = \min \{1, 9\} = 1$$

$$V(2,x) = \min_{u \in U_2(x)} c(x,u) + V(3, \underbrace{f_2(x,u)}_{= x - 2 + u})$$

$$V(2,0) = \min_{u \in [\![2,6]\!]} \underbrace{c(0,u)}_{5u+1} + V(3, u-2)$$

$$= \min \{30, 31, 32, 33, 31\} = 30$$

Commande optimale : $[3, 0, 4]$

$t = 1, \quad x_1 = 2 \longrightarrow u_1 = 3$

$t = 2, \quad x_2 = x_1 + u_1 - d_1 = 2 \longrightarrow u_2 = 0$

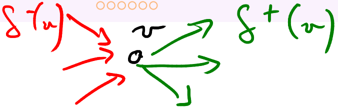
$t = 3, \quad x_3 = x_2 + u_2 - d_2 = 0 \longrightarrow u_3 = 4$

$t = 4, \quad x_4 = x_3 + u_3 - d_3 = 0$

3. Flots et coupes

12 Octobre 2022

Qu'est-ce qu'un flot ?



Definitions. Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté, s et t deux sommets dans V, et $u : A \to \mathbb{R}_+$ une fonction de capacité.

Un s-t **flot** est une fonction $f : A \to \mathbb{R}_+$ telle que : $f(a)$, f_a

$$\forall v \in V \setminus \{s,t\}, \quad \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = 0$$

C'est un s-t flot sous u si :

$$\forall a, \quad f(a) \leq u(a)$$

La **valeur** du s-t flot est :

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a \in \delta^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(s)} f(a)$$

Qu'est-ce qu'un flot ?

Definitions. Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté, s et t deux sommets dans V, et $u : A \to \mathbb{R}_+$ une fonction de capacité.

Un s-t **flot** est une fonction $f : A \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall v \in V \backslash \{s, t\}, \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a)$$

C'est un s-t flot sous u si :

La **valeur** du s-t flot est :

Qu'est-ce qu'un flot ?

Definitions. Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté, s et t deux sommets dans V, et $u : A \to \mathbb{R}_+$ une fonction de capacité.

Un s-t **flot** est une fonction $f : A \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall v \in V \backslash \{s, t\}, \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a)$$

C'est un s-t flot sous u si :

$$\forall a \in A, \ f(a) \leq u(a)$$

La **valeur** du s-t flot est :

Qu'est-ce qu'un flot ?

Definitions. Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté, s et t deux sommets dans V, et $u : A \to \mathbb{R}_+$ une fonction de capacité.

Un s-t **flot** est une fonction $f : A \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall v \in V \backslash \{s, t\}, \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a)$$

C'est un s-t flot sous u si :

$$\forall a \in A,\ f(a) \leq u(a)$$

La **valeur** du s-t flot est :

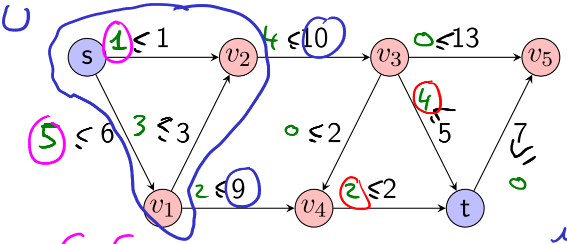
$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a \in \delta^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(s)} f(a)$$

$$= \sum_{a \in \delta^-(t)} f(a) - \sum_{a \in \delta^+(t)} f(a)$$

Problème de **s-t** flot maximum

Maximum s-t flow

- **Instance**. Un graphe orienté $D = (V, A)$, deux sommets distincts s et t dans V, et une fonction de capacité $u : A \to \mathbb{R}_+$.
- **Question**. Un s-t flot sous u de valeur maximum.



$\delta^+(U) = \{(v_2, v_3), (v_1, v_4)\}$

u

f

$val(f) = 1 + 5 = 6 = 4 + 2$

$u(B) = 10 + 9$

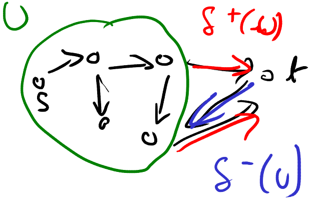
Qu'est-ce qu'une coupe ?

$$\delta^+(U) = \{ a = (u,v) \in A \mid u \in U,\ v \notin U \}$$

Definitions. Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté, s et t deux sommets dans V, et $u : A \to \mathbb{R}_+$ une fonction de capacité.

- Une s-t **coupe** est un ensemble d'arcs $B = \delta^+(U)$ pour $U \subseteq V$ qui contient s mais pas t.
- La **capacité** $u(B)$ de la coupe vaut :

$$u(B) = \sum_{a \in B} u(a)$$



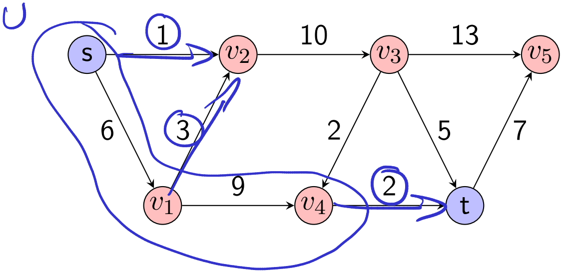
Problème de **s-t** coupe minimum

Minimum **s-t** cut

- **Instance**. Un graphe orienté $D = (V, A)$, deux sommets distincts s et t dans V, et une fonction de capacité $u : A \to \mathbb{R}_+$.
- **Question**. Une s-t coupe B de valeur minimum $u(B)$.

$B = \delta^+(U)$

$u(B) = 6$



Flot maximum et coupe minimum

Proposition. Soit f un s-t flot sous u et $B = \delta^+(U)$ une s-t coupe.
On a d'une part :

D'autre part :

Flot maximum et coupe minimum

Proposition. Soit f un s-t flot sous u et $B = \delta^+(U)$ une s-t coupe. On a d'une part :

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a \in \delta^+(U)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(U)} f(a)$$

D'autre part :

Flot maximum et coupe minimum

Proposition. Soit f un s-t flot sous u et $B = \delta^+(U)$ une s-t coupe. On a d'une part :

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a \in \delta^+(U)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(U)} f(a)$$

D'autre part :

$$\mathrm{val}(f) \leq u(B)$$

U

Preuve

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{a\in\delta^+(s)} f(a) - \sum_{a\in\delta^-(s)} f(a) + \sum_{v\in U\setminus s} \underbrace{\left[\sum_{a\in\delta^+(v)} f(a) - \sum_{a\in\delta^-(v)} f(a)\right]}_{=0}$$

$$= \sum_{v\in U}\left[\sum_{a\in\delta^+(v)} f(a) - \sum_{a\in\delta^-(v)} f(a)\right]$$

$$= \sum_{a\in\delta^+(U)} \underbrace{f(a)}_{\leq u(a)} - \underbrace{\sum_{a\in\delta^-(U)} f(a)}_{\leq 0}$$

$$\leq \sum_{a\in\delta^+(U)} u(a) = u(B)$$

Graphe résiduel

Définitions. Soit $(D = (V, A),\ s,\ t,\ u)$ une instance du problème de s-t flot maximum, on définit de nouveaux arcs $\overleftarrow{a}$:

On définit les **capacités résiduelles** $u_f : \overleftrightarrow{A} \to \mathbb{R}_+$:

On définit le **graphe résiduel** par $\overleftrightarrow{D_f} = (V, A_f)$ où :

Graphe résiduel

Définitions. Soit $(D = (V, A),\ s,\ t,\ u)$ une instance du problème de s-t flot maximum, on définit de nouveaux arcs $\overleftarrow{a}$:

- $\forall a = (u, v) \in A$, $\overleftarrow{a} = (v, u)$
- $\overleftrightarrow{A} = A \cup \{\overleftarrow{a} : a \in A\}$

On définit les **capacités résiduelles** $u_f : \overleftrightarrow{A} \to \mathbb{R}_+$:

On définit le **graphe résiduel** par $\overleftrightarrow{D_f} = (V, A_f)$ où :

Graphe résiduel

Définitions. Soit $(D = (V, A), s, t, u)$ une instance du problème de s-t flot maximum, on définit de nouveaux arcs $\overleftarrow{a}$:

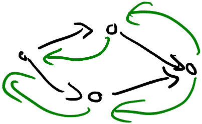
- $\forall a = (u, v) \in A$, $\overleftarrow{a} = (v, u)$
- $\overleftrightarrow{A} = A \cup \{\overleftarrow{a} : a \in A\}$

On définit les **capacités résiduelles** $u_f : \overleftrightarrow{A} \to \mathbb{R}_+$:

- $u_f(a) = u(a) - f(a)$
- $u_f(\overleftarrow{a}) = f(a)$

On définit le **graphe résiduel** par $\overleftrightarrow{D_f} = (V, A_f)$ où :

Graphe résiduel



A $\overleftarrow{A}$

Définitions. Soit $(D = (V, A),\ s,\ t,\ u)$ une instance du problème de s-t flot maximum, on définit de nouveaux arcs $\overleftarrow{a}$:

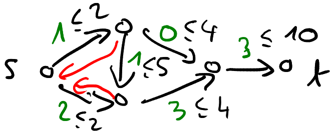
- $\forall a = (u, v) \in A,\ \overleftarrow{a} = (v, u)$
- $\overleftrightarrow{A} = A \cup \{\overleftarrow{a} : a \in A\}$

On définit les **capacités résiduelles** $u_f : \overleftrightarrow{A} \to \mathbb{R}_+$:

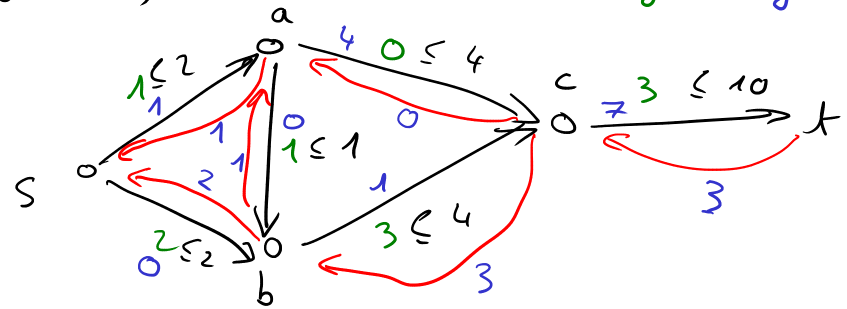
- $u_f(a) = u(a) - f(a)$ = de combien on peut augmenter le flot sur a avant d'atteindre $u(a)$
- $u_f(\overleftarrow{a}) = f(a)$ = ______ a ______ baisser ______ 0

On définit le **graphe résiduel** par $\overleftrightarrow{D_f} = (V, A_f)$ où :

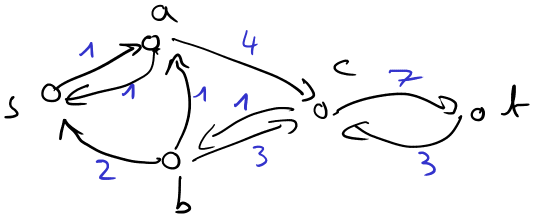
$$A_f = \{a \in \overleftrightarrow{A} : u_f(a) > 0\}$$



$D = (V, A)$ $\quad A \quad \overleftarrow{A} \quad u \quad f \quad u_f$



$\overleftrightarrow{D}_f$:



Chemin f-augmentant

Définitions. Un **chemin f-augmentant** est un s-t chemin dans le graphe résiduel.

Augmenter le flot f d'une valeur γ le long d'un s-t chemin P consiste à :

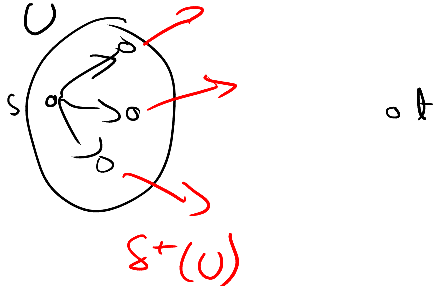
- $f(a) \leftarrow f(a) + \gamma$ si $a \in P$
- $f(a) \leftarrow f(a) - \gamma$ si $\overleftarrow{a} \in P$

Proposition. Un s-t flot f est maximum s'il n'existe pas de chemin f-augmentant.

Preuve

Si pas de chemin f-augmentant

D_f



$B = \delta^+(U)$

$\forall a \in \delta^+(U), \; f(a) = u(a)$

$\mathrm{val}(f) = u(B)$

Théorème flot maximum coupe minimum

Théorème. La valeur maximum d'un s-t flot est égale à la valeur minimum d'une s-t coupe.

Preuve

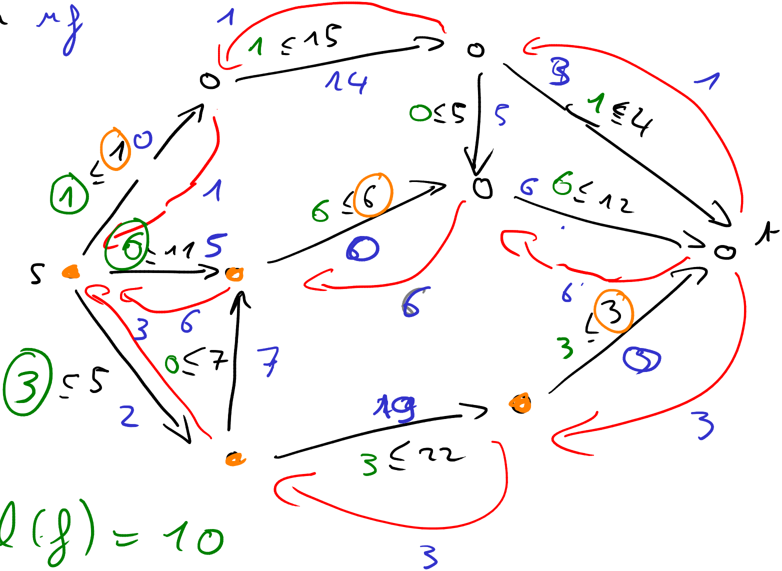
Algorithme d'Edmonds-Karp / Ford-Fulkerson

1. Instance : $(D = (V, A),\ s,\ t,\ u)$
2. Initialisation : Pour tout arc $a \in A$, $f(a) \leftarrow 0$
3. Tant qu'il existe un chemin f-augmentant
   - $P \leftarrow$ chemin f-augmentant avec un nombre minimum d'arcs
   - Augmenter f de $\min_{a \in P} u_f(a)$

Proposition. L'algorithme trouve un flot maximum en $\mathcal{O}(|A|^2|V|)$

Proposition. Si la capacité u est entière, alors il existe un flot maximum entier, et l'algorithme d'Edmonds-Karp le trouve.

$f \quad u \quad u_f$



$val(f) = 10$

$U \qquad B = \delta^+(U) \qquad u(B) = 10$

Définition : b-flot

Definition. Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté, $\ell : A \to \mathbb{R}_+$ et $u : A \to \mathbb{R}_+$ des capacités telles que $\ell \leq u$, et $b : V \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\sum_{v \in V} b(v) = 0$.

Un b-**flot** est une application $f : A \to \mathbb{R}_+$ telle que :

Et pour tout $a \in A$:

Une **circulation** est un b-flot avec $b = 0$.

Définition : b-flot

Definition. Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté, $\ell : A \to \mathbb{R}_+$ et $u : A \to \mathbb{R}_+$ des capacités telles que $\ell \leq u$, et $b : V \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\sum_{v \in V} b(v) = 0$.

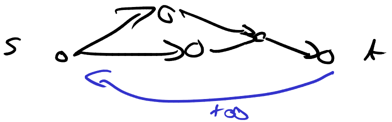
Un b-**flot** est une application $f : A \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall v \in V, \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = b(v)$$

Et pour tout $a \in A$:

Une **circulation** est un b-flot avec $b = 0$.

Définition : b-flot



$b = 0$

Definition. Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté, $\ell : A \to \mathbb{R}_+$ et $u : A \to \mathbb{R}_+$ des capacités telles que $\ell \leq u$, et $b : V \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\sum_{v \in V} b(v) = 0$.

Un b-**flot** est une application $f : A \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall v \in V, \sum_{a \in \delta^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \delta^-(v)} f(a) = b(v)$$

Et pour tout $a \in A$:

$$\ell(a) \leq f(a) \leq u(a)$$

Une **circulation** est un b-flot avec $b = 0$.

b-flot de coût minimum

Soit une fonction de coût $c : A \to \mathbb{R}$, le **coût d'un b-flot f** est :

$$\sum_{a \in A} c(a) f(a)$$

Minimum cost flow

- **Instance**. Un graphe orienté $D = (V, A)$, $\ell : A \to \mathbb{R}_+$ et $u : A \to \mathbb{R}_+$ des capacités telles que $\ell \leq u$, $b : V \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\sum_v b(v) = 0$, et une fonction de coût $c : A \to \mathbb{R}$.
- **Question**. Un b-flot de coût minimum.

Cycle f-augmentant

Soit f un b-flot, on définit le **graphe résiduel** $D_f = (V, A_f)$ où :

$$A_f = \{a \in A : u(a) > f(a)\} \cup \{\overleftarrow{a} : a \in A \text{ et } f(a) > \ell(a)\}$$

On définit la capacité résiduelle u_f comme :

- $u_f(a) = u(a) - f(a)$ si $a \in A$
- $u_f(a) = f(a) - \ell(a)$ si $\overleftarrow{a} \in A$

On étend $c(\overleftarrow{a}) = -c(a)$ pour $\overleftarrow{a} \in \overleftarrow{A}$.

Un cycle f-augmentant C est un cycle dans D_f. On définit son coût par :

$$c(C) = \sum_{a \in C} c(a)$$

Critère d'optimalité

Théorème. Un b-flot f est de coût minimum s'il n'existe pas de cycle f-augmentant C tel que $c(C) < 0$.

Algorithme de suppression de cycle

Definition Le coût moyen d'un cycle C dans le graphe résiduel est définit par :

$$\bar{c}(C) = \frac{c(C)}{|C|}$$

Algorithme de suppression de cycle de coût moyen minimum (Algorithme 6 poly.).

PL~~NE~~ pour le s-t flot maximum

$x_a = f(a)$

$$\max_x \sum_{a \in \delta^+(s)} x_a - \sum_{a \in \delta^-(s)} x_a = val(f)$$

$$\text{s.t. } x_a \geq 0$$

$$\begin{cases} \sum_{a \in \delta^+(v)} x_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} x_a = 0 & \forall v \neq s, t \\ x_a \leq u(a) & \forall a \end{cases}$$

PLNE pour le s-t flot maximum

$$
\begin{aligned}
\max_{x} \quad & \sum_{a \in \delta^+(s)} x_a - \sum_{a \in \delta^-(s)} x_a \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{a \in \delta^+(v)} x_a - \sum_{a \in \delta^-(v)} x_a = 0, && \forall v \notin \{s,t\} \\
& x_a \leq u_a, && \forall a \in A \\
& 0 \leq x_a, && \forall a \in A
\end{aligned}
$$

Propriétés

Proposition. La matrice de flot est totalement unimodulaire.

Proposition. Le problème de s-t capacité minimum est le dual Lagrangien du problème de s-t flot maximum.

6.9
6.13
6.10
6.16

6.9/ • n piles de sable $i \in [n]$, s_i quantité
• m trous $j \in [m]$, t_j capacité

• d_{ij} coût de déplacer 1 unité de i vers j

• Hypothèse : $\sum_{i=1}^{n} s_i \overset{>}{\underset{<}{=}} \sum_{j=1}^{m} t_j$

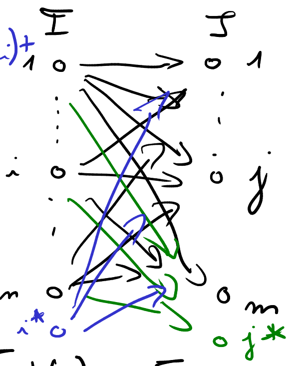
$b(i^*) = \left(\sum t_j - \sum s_i\right)_+$

$i \in I$

$b(i) = s_i$

$j \in J$

$b(j) = -t_j$



$V = I \cup J$

$A = \{(i,j) \mid i \in I, j \in J\}$

$u((i,j)) = +\infty$

$= \min(s_i, t_j)$

$c((i,j)) = d_{ij}$

$l((i,j)) = 0$

$\sum_v b(v)$

$= \sum_I b(i) + \sum_J b(i) = \sum_I s_i - \sum_J t_j$

$b(j^*) = \left(\sum s_i - \sum t_j\right)_+$

$u((i, j^*)) = +\infty$

$c((i, j^*)) = 0$