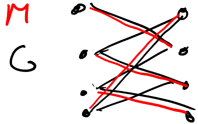
8 Matchings

6 Décembre 2023

Maximum weight matching / couplage



$\subset E$

Rappel : Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un matching M sur G est un ensemble d'arêtes disjointes. (u_1, v_1) (u_2, v_2) disjoints, $v_1 \neq u_2$ $u_1 \neq u_2$ $u_1 \neq v_2$, $v_2 \neq u_1$

Maximum weight matching $\in \mathcal{P}$

- **Instance**. Un graphe biparti $G = (V, E)$, une fonction de poids $w : E \to \mathbb{R}$.
- **Question**. Un matching M de poids maximum $\sum_{e \in E} w(e)$.

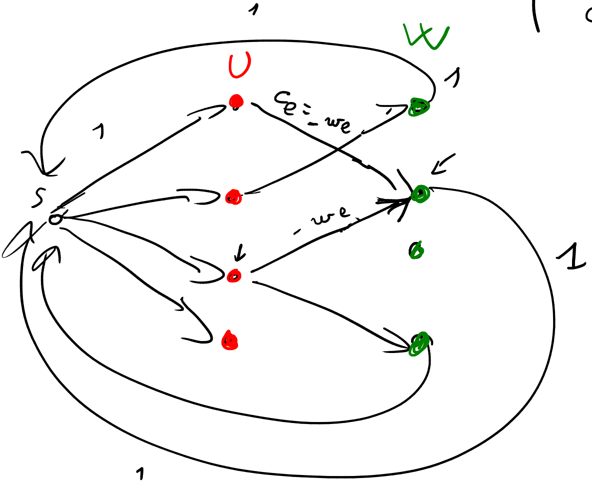
$\to$ Méthode hongroise cf. algorithme 7 p.73.

Formulation based on flows

Exercice : Modéliser le Maximum weight matching problem à l'aide d'un problème de flot à coût minimum.

- graphe orienté $D = (V, A)$
- capacités u, ℓ
- coût $c : E \to \mathbb{R}$
- $b : V \to \mathbb{R}$

Formulation based on flows



$b(v) = 0$
circulation

- $G = (V, E)$ $\qquad V = U \sqcup W$

$\mathcal{D} = (\mathcal{V}, A) \qquad \mathcal{V} = V \cup \{s\}$

$$\begin{cases} \forall\ e = (u,v) \in E,\ u \in U,\ v \in W,\ (u,v) \in A \\ \forall v \in U \quad (s,v) \\ \forall v \in W \quad (v,s) \end{cases}$$

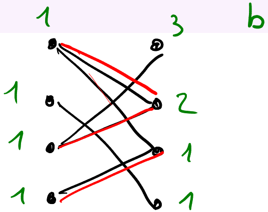
- $u((s,u)) = 1$
- $u((v,s)) = 1 \quad \forall v \in W$
- $u((u,v)) = +\infty \quad (u,v) \in E$ (ou ≥ 1)

- $b = 0$
- $\forall\ e \in E,\ c_e = -w_e$
- $\ell = 0$

$$\forall v \quad \left| \begin{array}{l} c_{s,u} = 0 \\ c_{v,s} = 0 \end{array} \right.$$

- Les capacités sont entières donc il existe un flot optimal entier (retourné par l'algo)

b-matchings



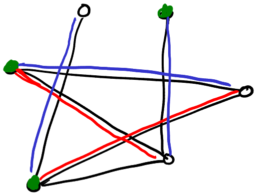
Définition : Soit $G = (V, E)$ un graphe, $b : V \mapsto \mathbb{Z}_+$ une fonction des sommets de G. Un b-matching est un sous ensemble $M \subset E$ tel que $deg_M(v) \leq b(v) \quad \forall v \in V$.

Maximum weight b-matching

- **Instance**. Un graphe biparti $G = (V, E)$, $b : V \mapsto \mathbb{Z}_+$ une fonction des sommets, et une fonction de poids $w : E \to \mathbb{R}$.
- **Question**. Un b-matching M de poids maximum $\sum_{e \in E} w(e)$.

$deg_M(v) \longrightarrow G' = (V, M)$

7.5/



G graphe

M couplage / matching

U couverture / cover

M' autre couplage

1) Soit U une couverture, M un couplage

- $\forall v \in U$, il y a au plus une arête dans $M \cap \delta(v)$
- $\forall e \in M$, $e = (u, v)$, $u \in U$ ou $v \in U$

Donc $|U| \geq |M|$

2) Pb de couplage de taille maximum.

- $x_e \in \{0,1\}$

- $$\begin{aligned} \max_x \ & \sum_{e \in E} x_e \\ \text{s.t.} \ & \sum_{e \in \delta(u)} x_e \leq 1 \quad \forall u \in V \qquad (y_u) \\ & x_e \in \{0,1\} \quad \forall e \in E \qquad (\lambda_e) \end{aligned}$$

- Pb de couverture de taille min

  - $y_v \in \{0,1\}$

  - $$\begin{cases} \min_y \sum_{v \in V} y_v \\ \text{s.t.} \ y_u + y_v \geq 1 \quad \forall e = (u,v) \in E \\ \qquad y_v \in \{0,1\} \quad \forall v \in V \end{cases}$$

• Caractérisation de Ghouila-Houri

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est TU si

$$\forall R \subset [\![1, m]\!], \; \exists R_1, R_2 \text{ tq } \left| \begin{array}{l} R_1 \sqcup R_2 = R \\ R_1 \cap R_2 = \emptyset \end{array} \right.$$

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \; \sum_{i \in R_1} a_{ij} - \sum_{i \in R_2} a_{ij} \in \{0, -1, 1\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R \\ R_1 \\ \\ R_2 \end{array}$$

$R_1 - R_2$: $0 \quad 0 \quad \text{———} \quad 0 \quad \ldots$

• Si A TU

① $[A \; I_m]$ TU

② A^T TU

$$\begin{cases} \sum_{e \in \delta(v)} x_e \le 1 & \forall v \\ x_e \le 1 & \forall e \end{cases}$$

$A \in \mathbb{R}^{(m+n) \times m}$

$|V| = n, \quad |E| = m$

$$A = \begin{array}{cc} & e=(u,v) \\ \begin{array}{c} \\ \\ u \\ \\ v \\ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 1 & \\ 0 & \\ 1 & \\ 0 & A_1 \\ 1 & \\ 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{I} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \\ m \end{array} \\ & \underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxx}}_{m} \end{array}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \hline 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Soit $R \subset [\![1, m]\!]$

$e = (u, v) \quad u \in U, \ v \in W$

$$A_1 = \begin{array}{c} U \\ \\ W \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -u \\ \hline 1 & -v \end{bmatrix}$$

$R_1 = R \cap U \qquad R_2 = R \cap W$

A_1 est TU $\qquad R_1 - R_2 \in \{0, 1, -1\}$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ I_m \end{bmatrix} \text{ TU}$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \sum_{e \in E} x_e + \sum_{v \in V} y_v \Big(1 - \sum_{e \in \delta(v)} x_e\Big)$$

$$+ \sum_{e \in E} \lambda_e (1 - x_e)$$

$$\max_{x} \min_{y, \lambda \geq 0} \mathcal{L}(x, y, \lambda)$$

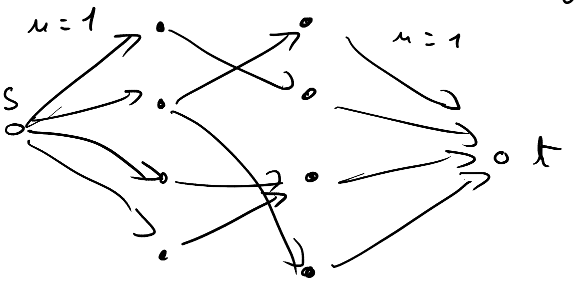
$$\mathcal{L}(-) = \sum_{v \in V} y_v + \sum_e \lambda_e + \sum_e x_e (1 - \lambda_e)$$

$$- \sum_v \sum_e y_v x_e \mathbb{1}_{e \in \delta(v)}$$

$$= \sum_{v \in V} y_v + \underline{\sum_e \lambda_e} + \sum_{e = (u,v)} x_e (1 - \lambda_e - y_u - y_v)$$

$$\left| \begin{array}{l} \min \sum_v y_v + \cancel{\sum_e \lambda_e} \\ \text{s.t.} \quad 1 \leq \cancel{\lambda_e} + y_u + y_v \quad \forall e = (u,v) \\ \qquad y \geq 0, \quad \lambda \geq 0 \end{array} \right.$$

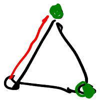
3)



- max-matching $\Leftrightarrow$ max st flot sur D
- min-cover $\Leftrightarrow$ min s-t coupe sur D

max-matching = min cover car max flot = min cut

4)



10.4 $x \in \{0,1\}^n$

1) $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1$

2) $\sum x_i = 2$

3) $x_A \leq x_B$

4) $x_A \leq 1 - x_B$

5) $1 - x_A \leq x_B$

6) $x_A = x_B$

7) $2x_A \leq x_B + x_C$

8) $x_A \leq x_B + x_C$

9) $x_B + x_C \leq 2x_A$

10) $x_B + x_C \leq x_A + 1$

11) $x_B + x_C + x_D + x_E \leq 1 + 3x_A$

12) $\sum_{i=B}^{H} x_i \leq m - 1 + (n - m + 1)x_A$

10.5 $\quad x \in \{0, 1\}$, $y \in [m, M]$

$z = xy$

$$m x \leq z \leq M x \quad \rightarrow \quad x = 0$$

$$\underbrace{-M(1-x) + y}_{\substack{= y \text{ si } x = 1 \\ \leq 0 \text{ si } x = 0}} \leq z \leq \underbrace{y - m(1-x)}_{\substack{= y \text{ si } x = 1 \\ \geq 0 \text{ si } x = 0}} \quad \rightarrow , \; x = 1$$

2021-2022 p 189

$M = \{v_1, \dots, v_n\}$

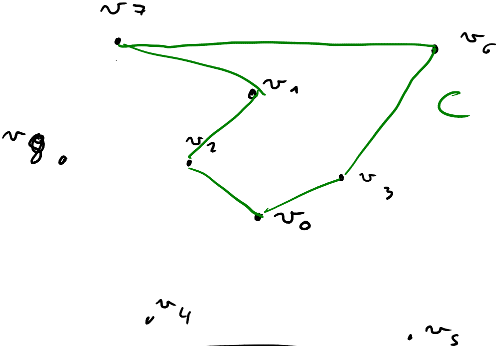
$K = \{k_1, \dots, k_m\}$

Q_k

p_{kv}

q_{kv}

Instance :



7) inégalité triangulaire + minimisation

8) Soit S une solution dans laquelle le produit k est acheté dans plusieurs marchés v_i, v_j

$\min(p_{ki}, p_{kj})$

9) $\underline{Q'_k = 1}$, $p'_{kv} = Q_k \, p_{kv}$

$q'_{vk} = \dfrac{q_{vk}}{Q_k}$

$y_v \in \{0,1\}$ $z_{kv} \in \{0,1\}$ $x_e \in \{0,1\}$

10) $\min\limits_{x,y,z} \sum\limits_{e \in E} \dfrac{d_e}{f} x_e + \sum\limits_{v \in M} \sum\limits_{k \in K} p_{kv} z_{kv}$

11) $\forall v \in V, \sum\limits_{e \in \delta(v)} x_e = 2 y_v$

12) $\forall k \in M, \sum\limits_{v \in V} z_{kv} = 1$

13) $z_{kv} \leq q_{kv} y_v \,, \forall k \in K \,, \forall v \in V$