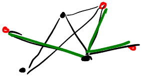
10. Conception de réseaux

24 Janvier 2024

Problème



S

Problème de l'arbre de Steiner de poids minimum

- **Instance.** Graphe $G = (V, E)$, fonction de poids $w : E \to \mathbb{R}_+$ et ensemble de sommets $S \subseteq V$, appelés terminaux.
- **Question.** Trouver un arbre de plus petit poids couvrant S.

Définitions :

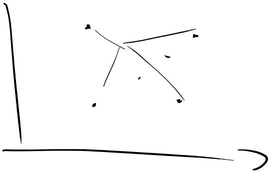
- **Arbre couvrant** S : arbre $T = (V', F)$, avec $S \subseteq V' \subseteq V$ et $F \subseteq E$.
- Soit $T = (V(T), E(T))$ un arbre de Steiner pour (G, w, S). Un **point de Steiner** est un sommet dans $V(T) \backslash S$.

Applications

Les applications de ce problème sont nombreuses :

- conception de réseau gazier,
- conception de réseau routier,
- conception de réseau informatique.

Arbre de Steiner Euclidien

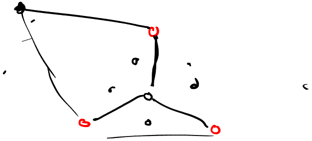


Terminaux sont des points du plan.

Points de Steiner sont des points du plan que l'on peut choisir librement.

Proposition. Points de Steiner sont toujours de degré 3, et leurs arêtes incidentes font un angle de 120°.

Arbre de Steiner Euclidien



Terminaux sont des points du plan.

Points de Steiner sont des points du plan que l'on peut choisir librement.

Proposition. Points de Steiner sont toujours de degré 3, et leurs arêtes incidentes font un angle de 120°.

Expliquer comment on se ramène au cas de l'arbre de Steiner usuel.

Arbre de Steiner Euclidien

Terminaux sont des points du plan.

Points de Steiner sont des points du plan que l'on peut choisir librement.

Proposition. Points de Steiner sont toujours de degré 3, et leurs arêtes incidentes font un angle de 120°.

Expliquer comment on se ramène au cas de l'arbre de Steiner usuel.

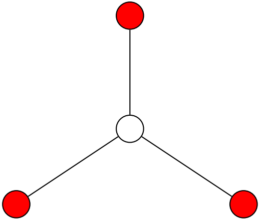
Nombre fini de points de Steiner possibles.

Exercice : Points de Steiner avec inégalité triangulaire

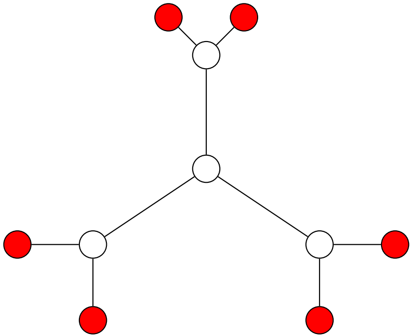
Proposition. Soit (G, w, S) une instance du problème d'arbre de Steiner telle que G est complet et w satisfait l'inégalité triangulaire. Il existe un arbre de Steiner optimal avec au plus $|S| - 2$ points de Steiner.

Donner un exemple de graphe à 4 sommets (3 terminaux) et à 10 sommets (6 terminaux) où l'on a égalité.

Correction



Correction



Exercice : Points de Steiner avec inégalité triangulaire

Soit $T = (V(T), E(T))$ un arbre de Steiner pour (G, w, S). Un point de Steiner est un sommet dans $V(T) \backslash S$.

Proposition. Soit (G, w, S) une instance du problème d'arbre de Steiner telle que G est complet et w satisfait l'inégalité triangulaire. Il existe un arbre de Steiner optimal avec au plus $|S| - 2$ points de Steiner.

Prouver le résultat.

$t = |S|$ $\quad p$ = nb de points de Steiner dans T

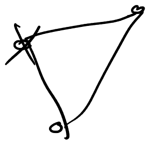
T arbre de Steiner $= (V(T), E(T))$

$|V(T)| = p + t$

$$|E(T)| = p + t - 1 = \frac{\sum_{v \in V(T)} \deg_T(v)}{2}$$

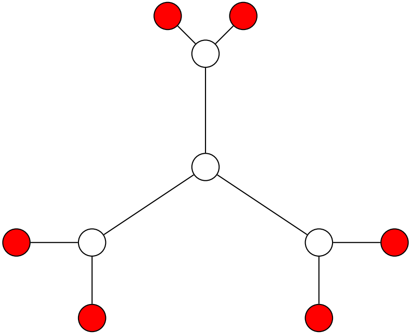
$v \in S$, $\deg(v) \geq 1$

$v \in V(T) \setminus S$, $\deg(v) \geq 3$



Correction

Soit T un arbre de Steiner. Par inégalité triangulaire, les points de Steiner sont de degré au moins 3.
On note p nombre de points de Steiner dans l'arbre obtenu et $t = |S|$. En utilisant que c'est un arbre, et en comptant les arêtes, on a $3p + t \leq 2(p + t - 1)$, ce qui donne le résultat.



Complexité

Théorème. Le problème de l'arbre de Steiner est **NP**-difficile, même si tous les poids sont égaux à 1.

Donner un programme linéaire en nombres entiers pour ce problème.

Formulation linéaire

Proposition. Soit r un sommet arbitraire, $r \in S$. Résoudre le problème de l'arbre de Steiner de coût minimum, c'est résoudre

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{x} & \sum\limits_{e \in E} w_e x_e & \\ \text{s.c.} & \sum\limits_{e \in \delta(X)} x_e \geq 1 & \forall X \subseteq V \setminus \{r\} \text{ tel que } X \cap S \neq \emptyset \\ & x_e \in \{0,1\} & \forall e \in E \end{array}$$

Formulation linéaire

Proposition. Soit r un sommet arbitraire, $r \in S$. Résoudre le problème de l'arbre de Steiner de coût minimum, c'est résoudre

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{e \in \delta(X)} x_e \geq 1 \quad \forall X \subseteq V \setminus \{r\} \text{ tel que } X \cap S \neq \emptyset \\ & x_e \in \{0,1\} \qquad \forall e \in E \end{aligned}$$

Par quel algorithme peut-on on résoudre

- le PLNE ?
- son relâché linéaire ?

Le problème précédent a deux caractéristiques qui le rende difficile à résoudre.

- il est en nombres entiers.
- il a un nombre exponentiel de contraintes.

Adaptation du branch-and-bound pour gérer un nombre exponentiel de contraintes : branch-and-cut.

Branch-and-cut

On note

$$\mathcal{C} = \{X \subseteq V \setminus \{r\} \colon X \cap S \neq \emptyset\},$$

Branch-and-bound avec génération de ligne pour la relaxation linéaire :

On choisit $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$.

1. On résout

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{e \in E} w_e x_e & \\ \text{s.c.} & \sum_{e \in \delta(X)} x_e \geq 1 & X \in \mathcal{C}' \\ & 0 \leq x_e \leq 1 & e \in E \end{array}$$

   Cela donne une solution $\bar{x}$.
2. On résout le problème de séparation pour $\bar{x}$
   - Si pas de contrainte violée, alors on continue le branch-and-bound (*on a résolu la relaxation linéaire*).
   - Sinon, on retourne en 1. en ajoutant la contrainte violée X' à $\mathcal{C}'$.

Problème de séparation

Séparation des contraintes pour arbre de Steiner

- **Instance**. Vecteur $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^E$.
- **Question**. $\min_{X \in \mathcal{C}} \sum_{e \in \delta(X)} \bar{x}_e - 1$

Renvoie 'oui' si x satisfait toutes les contraintes $\sum_{e \in \delta(X)} \bar{x}_e \geq 1$ pour $X \in \mathcal{C}$. Si non, renvoie $X' \in \mathcal{C}$ tel que $\sum_{e \in \delta(X')} \bar{x}_e < 1$.

Donner un algorithme polynomial qui résout ce problème

Séparation pour l'arbre de Steiner

L'algorithme $\mathcal{A}$ de séparation des contraintes pour l'arbre de Steiner existe :

Mettre $\bar{x}_e$ comme capacité de e, pour $e \in E$.

A r fixé : calculer pour tout s dans $S \setminus \{r\}$ une s-r coupe de capacité minimum.

Si l'une de ces coupes $\delta(X')$ a une capacité < 1, alors

$$X' \in \mathcal{C} \text{ et } \sum_{e \in \delta(X')} \bar{x}_e < 1.$$

Recherche locale

Proposer une heuristique à voisinage pour l'arbre de Steiner.

- Comment une solution est elle encodée ?
- Donner un voisinage

Recherche locale

Proposer une heuristique à voisinage pour l'arbre de Steiner.

- Comment une solution est elle encodée ?
- Donner un voisinage

Recherche locale classique pour le problème de l'arbre de Steiner :

Pour tout $V' \subseteq V$ tel que $S \subseteq V'$, on calcule par Kruskal l'arbre couvrant V' de poids mininimum n'utilisant que les sommets de V' : donne le coût de V'.

Alors V' est voisin de V'' si l'on est dans une des ces situations

1. $V'' := V' \setminus \{v'\}$ pour un $v' \in V'$, (*drop*)
2. $V'' := V' \cup \{v''\}$ pour un $v'' \in V \setminus V'$ (*add*) ou
3. $V'' := V' \setminus \{v'\} \cup \{v''\}$ (*swap*).