Exercice 6.9

November 14, 2023

Instance: n piles de sable I de quantité s_i, m trous J de capacité t_j.

Cas particulier: $\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{j=1}^m t_j$

On modélise le problème sous la forme d'un b-flot de coût minimum:

- On considère un graphe $G = (V, A)$ biparti orienté, avec $V = I \cup J$ et $A = \{(i, j) | i \in I, j \in J\}$
- Chaque pile i génère s_i quantité de flot: $\forall i \in I$, $b(i) = s_i$
- Chaque trou j absorbe t_j quantité de flot: $\forall j \in J$, $b(j) = -t_j$
- Des qantités positives de sable transites le long des arcs: $\forall a \in A, \ell(a) = 0$
- Pas de limite maximum de sable le long d'un arc: $\forall a = (i, j) \in A, u(a) = +\infty$. Remarque: en pratique on aura toujours $f((i, j)) \leq \min(s_i, t_j)$, donc cela fonctionne aussi de prendre u qui vaut n'importe quelle valeur supérieure ou égale à $\min(s_i, t_j)$ sur chaque arc.
- Coûts de déplacement: $\forall a = (i, j) \in A, c(a) = d_{ij}$

On vérifie que l'on a bien $\sum_{v \in V} b(v) = \sum_{i=1}^n s_i - \sum_{j=1} t_j = 0$.

Cas général

Pour gérer le cas où $\sum_{i=1}^n s_i \neq \sum_{j=1}^m t_j$, il faut ajouter deux sommets $i^\star$ et $j^\star$ respectivement à I et J, tels que:

- $b(i^\star) = \max(\sum_{j=1}^m t_j - \sum_{i=1}^n s_i, 0)$
- $b(j^\star) = \max(\sum_{i=1}^n s_i - \sum_{j=1}^m t_j, 0)$
- $\forall i$, $c((i, j^\star)) = 0$
- $\forall j$, $c((i^\star, j)) = 0$

$j^\star$ permet de modéliser le surplus de sable lorsqu'il y en a, et $i^\star$ permet de modéliser le manque de sable lorsque c'est le cas. Dans les deux cas, on vérifie que l'on a toujours $\sum_{v \in V} b(v) = 0$.